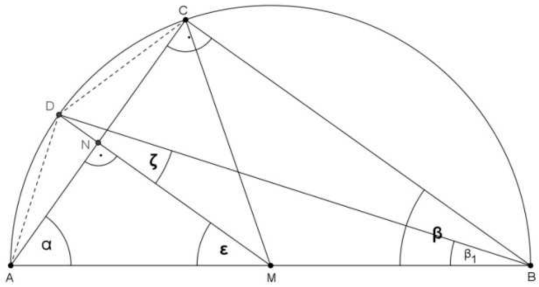
FÜMO 25 2. Runde Lösungen 8. Klasse

Aufgabe 1 Viereck im Halbkreis



a,b) MN ist Lot im gleichschenkligen ΔAMC .

MN ist daher auch Mittelsenkrechte. Also ist $\overline{AN} = \overline{NC}$

$\Delta AND \cong \Delta CND$ $\left(SWS;\ \overline{DN} = \overline{DN},\ 90°,\ \overline{AN} = \overline{NC}\right)$

$\Rightarrow \overline{AD} = \overline{CD}$

ΔAMN *rechtwinklig* $\Rightarrow \varepsilon = 90° - \alpha = \beta$

ΔDMB *gleichschenklig* $\Rightarrow \varsigma = \beta_1$

Außenwinkelsatz $\Rightarrow \varepsilon = \beta_1 + \varsigma = 2\beta_1 = \beta$

Also ist DB die Winkelhalbierende von $\angle CBA$

c) ΔAMD gleichschenklig $\Rightarrow \angle BAD = \frac{1}{2}(180° - \varepsilon) = \frac{1}{2}(180° - (90° - \alpha)) = 45° + \frac{\alpha}{2}$

$\angle CBA = 90° - \alpha;\quad \angle ADC = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (180° - \varepsilon) = 180 - \varepsilon = 90° + \alpha$

$\angle DCB = (\angle BAD - \alpha) + 90° = 135° - \frac{\alpha}{2}$

Aufgabe 2 Fußballturnier

Insgesamt werden 0,5·6·5 = 15 Spiele durchgeführt. Je Spiel erzielen beide Teams zusammen 2 oder 3 Punkte. Der tatsächliche Gesamt-Punktestand aller Teams kann demnach nur zwischen 15·2 = 30 (nur Remisspiele) oder 15·3 = 45 (nur Siege) liegen.

Andererseits soll sich der Punktestand S am Ende als Summe von sechs unmittelbar aufeinander folgenden Zahlen zusammensetzen d.h. es gilt:

S = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4) + (a+5) = 6a+15. Das führt zu der Abschätzung: 30 ≤ 6a+15 ≤ 45 bzw. 15 ≤ 6a ≤ 30 und nach Division durch 6 schließlich 3 ≤ a ≤ 5, da a ganzzahlig sein muss.

Wir zeigen, dass nur a = 4 eine Lösung ist.

Fall 1: a = 3.

Die Gesamtsumme am Ende beträgt hier S = 3+4+5+6+7+8 = 33.

Die beiden Teams mit 6 und 7 Punkten müssen jeweils mindestens eines aus 5 Spielen gewonnen haben. Die Mannschaft mit 8 Punkten muss mindestens zwei Siege eingefahren haben, da 3+1+1+1+1 = 7 < 8 ist.

Insgesamt müssen demnach mindestens 4 Siege erzielt worden sein.

Daraus folgt nun für die Gesamtsumme S: S ≥ 4·3+11·2 = 34, was wegen S ≤ 33 nicht möglich ist.

Fall 2: a = 5.

Die Gesamtsumme beläuft sich jetzt auf S = 15+30 = 45. Es gibt also keine unentschiedenen Spiele. Da in diesem Fall jedes Team entweder 0 oder 3 Punkte erhält, muss die Punktzahl eines jeden Teams ein Vielfaches von 3 sein. Damit können diese Einzelergebnisse aber keine fortlaufenden Zahlen sein.

Wir zeigen schließlich, dass a = 4 tatsächlich eintreten kann. Die nachfolgende Tabelle enthält eine Konstellation, wo die Mannschaften A bis F die Punktestände 4 bis 9 wie gefordert, haben erzielen können. Die rechte Spalte enthält die entsprechenden Punktzahlen.

	A	B	C	D	E	F	**Σ**
A	-	3	1	0	0	0	**4**
B	0	-	1	0	3	1	**5**
C	1	1	-	3	0	1	**6**
D	3	3	0	-	1	0	**7**
E	3	0	3	1	-	1	**8**
F	3	1	1	3	1	-	**9**

Aufgabe 3 2017 als Summe

Es soll gelten: 2017 = a + (a + 1) + (a + 2) + … + (a + k): mit a > 0; k > 0; a, k ∈ N

(a ist die Anfangszahl und k + 1 die Anzahl der Summanden)

Daraus folgt mit Anwendung der Summenformel von Gauß:

2017 = a(k + 1) + k(k + 1)/2 ⇔ 2017 = (k+1)(a + k/2) ⇔ 4034 = (k+1)(2a+k) (*)

Die Primfaktorzerlegung von 4034 ist 2· 2017.

Für die Zerlegung in zwei positive ganzzahlige Faktoren

gibt es nur die vier Möglichkeiten 1· 4034; 2·2017; 2017·2 und 4034·1.

Da k+1 > 1 und 2a+k > 3 kann man die Gleichung (*) nur für den Fall

2 = (k + 1) und 2017 = (2a + k) lösen. Es ergibt sich also k = 1 und a = 2016/2 = 1008.

Somit ist 2017 = 1008+1009 die einzige Zerlegung, die den Bedingungen genügt.