# FÜMO 25 2. Runde Lösungen 7. Klasse

## Aufgabe 1 Plus + Minus + Mal + Durch

Die beiden Zahlen seien a und b mit $a \geq b$

Da der Summenwert S eine natürliche Zahl ist, muss a ein Vielfaches von b sein: $a = kb$ mit $k \in \mathbb{N}$.

Damit folgt
$$(kb + b) + (kb - b) + kb^2 + k = 441$$
$$kb^2 + 2kb + k = 441$$
$$k(b^2 + 2b + 1) = 441$$
$$k(b+1)^2 = 441$$

Die Primfaktorenzerlegung von 441 ist $3^2 \cdot 7^2$.

Dann gibt es für k, b und a die folgenden Möglichkeiten:

| k | b+1 | b | a | S |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 21 | 20 | 20 | $(20+20)+(20-20)+20\cdot 20+20:20 = 441$ |
| $3^2 = 9$ | 7 | 6 | 54 | $(54+6)+(54-6)+54\cdot 6+54:6 = 441$ |
| $7^2 = 49$ | 3 | 2 | 98 | $(98+2) + (98-2) +98\cdot 2+98:2 = 441$ |
| $3^2 7^2 = 441$ | 1 | 0 (nicht positiv) | - | - |

## Aufgabe 2 n, k … ungelöst

Wir nehmen an, die beiden Aussagen (3) und (4) treffen zu. Dann gibt es eine positive ganze Zahl m so, dass $n+k = 3m$. Es gilt nach (3) $n+7k = (n+k) + 6k = 3m + 6k = 3\cdot(m+2k)$. Dann kann $n+7k$ keine Primzahl sein d.h. eine der beiden Aussagen (3) und (4) ist falsch.
Wir nehmen jetzt an, dass die beiden Aussagen (2) und (3) zugleich wahr sind. Dann muss es wieder eine positive ganzzahlige Zahl m geben mit $n+k = 3m$. Aus (2) erhalten wir $3m = n+k =(2k+5)+k = 3k+5$. Nun sind 3m und 3k durch 3 teilbar, aber nicht die Zahl 5. Daher muss eine der Aussagen (2) oder (3) falsch sein.
Da es jedoch nach Voraussetzung genau eine falsche Aussage gibt, ist dies (3).
Somit müssen (1) und (2) wahr sein. Daraus können wir ableiten, dass die Zahl k sowohl $n+1$ als auch $(2k+5)+1 = 2k+6$ teilt. Also muss k ein Teiler von 6 sein. Damit müssen nur die Möglichkeiten $k = 1, 2, 3$ und 6 untersucht werden.
Die entsprechenden Werte für n sind $n = 7, 9, 11$ und 17.
Da aber nach (4) die Zahl $n+2k$ eine Primzahl sein soll, kommen letztlich nur die Paare (9,2) und (17,6) in Frage, denn $n+7k = 9 + 14 = 23$ und $n+2k = 17+42 = 59$.
Dies sind alle gesuchten Lösungen.

## Aufgabe 3 Kleinste Summe von Primzahlen

Da nur Primzahlen betrachtet werden, können die Ziffern 4; 6 und 8 nicht als Einer-Ziffern vorkommen.

Die gesuchte Summe muss also mindestens $40 + 60 + 80 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 = 207$ sein.

Da 9, 49 und 69 keine Primzahlen sind, muss unter den Primzahlen die 89 sein.

Die Zahl 1 ist keine Primzahl, also muss die 1 als Einerstelle bei 4 oder 6 verwendet werden.

Dieser Summenwert kann mit folgenden Primzahlen erreicht werden:

(1) 41, 67, 89, 2, 3 und 5 wegen $2 + 3 + 5 + 41 + 67 + 89 = 207$

(2) 43, 61, 89, 2, 5 und 7 wegen $2 + 5 + 7 + 43 + 61 + 89 = 207$

(3) 47, 61, 89, 2, 3 und 5 wegen $2 + 3 + 5 + 47 + 61 + 89 = 207$

Dabei ist in allen Fällen jede der sechs Zahlen eine Primzahl und jede der Ziffern 1,2,3… ,9 wird genau einmal verwendet.