Lösungen FÜMO 23 2. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1 11 und 13

Die folgende Tabelle enthält alle Zahlen bis 167, die sich als Summe 11m + 13n darstellen lassen.

m\n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	24	37	50	63	76	89	102	115	128	141	**154**	167
2	35	48	61	74	87	100	113	126	139	**152**	165	
3	46	59	72	85	98	111	124	137	**150**	163		
4	57	70	83	96	109	122	135	**148**	161			
5	68	81	94	107	120	133	**146**	159				
6	79	92	105	118	131	**144**	157					
7	90	103	116	129	142	155						
8	101	114	127	140	**153**							
9	112	125	138	**151**								
10	123	136	**149**									
11	134	**147**										
12	**145**											

Zunächst haben alle Zahlen auf den grauen Feldern, sowie die 5 Zahlen 134,136, 138, 140 und 142 diese Eigenschaft.
143=11*13 hat diese Eigenschaft nicht, dafür aber die 11 aufeinanderfolgenden Zahlen 144 bis 154.
Damit haben alle größeren Zahlen als 143 diese Eigenschaft, man erhält sie durch Addition von Vielfachen von 11.
Also haben (1 +2 + 3 + … + 10) + 5 + (2014 – 143) = 55 + 5 +1871 = 1931 Zahlen diese Eigenschaft.

Aufgabe 2 OXY im Quadrat

Wir wählen ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit O als Ursprung. Die x-Achse enthält dabei alle Grundseiten der Einheitsquadrate. Die y-Achse wird durch die linke Seite des 1. Quadrats festgelegt.
In diesem Koordinatensystem haben die Punkte O, P und Q die Koordinaten O(0 ; 0), P(2014 ; 1) und Q(2015 ; 1). Die Gerade OP hat die Steigung $m_{OP} = 1/2014$ und deshalb die Gleichung $2014\cdot y = x$.
Die Gerade OQ hat die Steigung $m_{OQ} = 1/2015$ und deshalb die Gleichung $2015\cdot y = x$.
Der Punkt X auf OQ hat demnach die Koordinaten X(1 ; 1/2015) und Y entsprechend Y(1 ; 1/2014).
Der Inhalt A der Fläche des Dreiecks OXY ist damit

$$A = \frac{1}{2}(y_Y - y_X)\cdot 1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2014} - \frac{1}{2015}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2015-2014}{2014\cdot 2015} = \frac{1}{8116420}$$

Aufgabe 3 Folgsame Zahlen mit Unterschied

Eine folgsame Zahl hat die Form $m\cdot(m+1)$ mit $m \in$ N. Damit soll gelten: $n(n + 2015) = m\cdot(m+1)$
Offensichtlich müssen die Zahlen m und m+1 zwischen n und n+2015 liegen.
Also kann man m und m+1 schreiben: $m = n + k$ und $m+1 = n + k +1$ mit $k \in$ N.

Als Bedingungsgleichung erhält man damit: $n(n + 2015) = (n + k)(n + k + 1)$

Dies gilt, genau dann, wenn $n^2 + 2015n = n^2 + kn + n + kn + k^2 + k$

$$\Leftrightarrow \quad 2015n = 2kn + n + k^2 + k$$
$$\Leftrightarrow \quad 2014n - 2kn = k^2 + k$$
$$\Leftrightarrow \quad n(2014 - 2k) = k^2 + k$$
$$\Leftrightarrow \quad n = \frac{k^2+k}{2014-2k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{k(k+1)}{1007-k}$$

Der größtmögliche Wert für k ist k = 1006.

Mit k = 1006 erhält man $n = \frac{1}{2}\cdot 1006\cdot 1007 = 503\cdot 1007 = 506521$ und damit

als größte folgsame Zahl mit der geforderten Eigenschaft:

$$(506521+1006)(506521+1007) = = 507527\cdot 507528 = 257\,584\,163\,256$$