FÜMO 21 1. Runde Lösungen 7. Klasse

Aufgabe 1

Seien n und m die Maßzahlen der beiden Seiten. Dann gilt für den Umfang u und die Fläche A:

$$u = 2(n+m) \text{ und } A = n\cdot m.$$

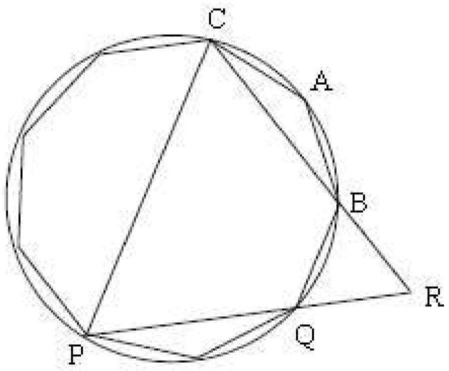
Beides soll gleich groß sein: $2n + 2m = n\cdot m$.

Wir lösen nach n auf: $n\cdot m - 2n = 2m$; $n(m-2) = 2m$; $n = 2m/(m-2) = [2(m-2) + 4]/(m-2) = 2 + 4/(m-2)$.

Damit n ganzzahlig ist, muss m-2 ein Teiler von 4 sein, also m-2 = 1 oder m-2 = 2 oder m-2 = 4.
Dies liefert die Lösungen m=3, m=4 und m=6. Für n erhält man dann jweils: n= 6, n=4 und n= 3.

Da die beiden Fälle m=3, n=6 und m=6 und n=3 kongruente Rechtecke liefern, gibt es genau zwei schöne Rechtecke: Ein 3x6-Rechteck und ein 4x4-Quadrat.

Aufgabe 2 Neuneck



Man kann das Neuneck einem Kreis einbeschreiben.
Dies ist möglich, da es regulär ist.
Die Innenwinkelsumme eines Neunecks beträgt
$(9-2)\cdot 180^0 = 1260^0$. Somit haben alle Innenwinkel des Neunecks die Weite $1260^0 : 9 = 140^0$.
Wir wählen eine weitere Ecke des Neunecks. Diese nennen wir Q. Die Diagonalen PQ und CB schneiden sich im Punkt R außerhalb des Vielecks.
Jetzt betrachten wir das Fünfeck PQBAC.
Die Innenwinkelsumme in diesem Fünfeck beträgt $(5-2)\cdot 180^0 = 540^0$.
Aus Symmetriegründen sind die Winkel $\measuredangle RCP$ und $\measuredangle RPC$ gleich groß und es gilt: $\measuredangle RCP = \measuredangle RPC = (540^0 - 3\cdot 140^0):2 = 60^0$.

Damit ist das Dreieck PRC gleichseitig. Wegen $\measuredangle RQB = \measuredangle RBQ = 180^0 - 120^0 = 60^0$ folgt, dass die beiden Strecken [BQ] und [PC] parallel sind. Daher ist auch das Dreieck QRB gleichseitig (*).

Wegen der Regularität des Neunecks und der Bedingung (*) gilt nun: $\overline{AB} = \overline{BQ} = \overline{BR}$ und damit $\overline{RC} = \overline{RP}$. Damit erhalten wir: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{BR} + \overline{BC} = \overline{PC}$.

Aufgabe 3 Alles teilt

Sei n die gesuchte Zahl. Da durch 0 nicht geteilt werden darf, enthält n die Ziffer 0 nicht. Enthält n die Ziffer 5, kann diese nur an der Einerstelle stehen. Dann wäre n aber nicht mehr teilbar durch 2, 4, 6 und 8, n wäre höchstens fünfstellig. Also wird 5 ausgeschlossen. Damit n die 9 als Ziffer enthält, müsste die Quersumme der Zahl aus den verbleibenden Ziffern 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40 durch 9 teilbar sein. Dies geht aber nur, wenn man die 4 weglässt. Es verbleiben 1, 2, 3, 6, 7, 8 und 9.

Die Zahl n ist möglichst groß, wenn sie mit 98… beginnt. Damit sie durch 8 teilbar ist, muss die Zahl aus den letzten drei Ziffern (dafür verbleiben 1, 2, 3, 6, 7) durch 8 teilbar sein. Da dafür alle ungeraden Zahlen entfallen, müssen 126, 132, 136, 162, 172, 216, 236, 276, 312, 362, 372, 612, 632, 672, 712, 726, 732 und 762 untersucht werden. Davon sind nur 312, 672 und 712 durch 8 teilbar.

Man betrachtet zunächst den Fall 312 (damit wird n am größten); dann hat n die Form 98xy312 mit $x,y \in \{6, 7\}$. Wegen $9876312 = 7\cdot 1410901 + 5$ ist diese Zahl nicht durch 7 teilbar. Dafür ist die nächstkleinere Zahl $9867312 = 7\cdot 1409616$ durch 7 teilbar.

Da diese Zahl durch 8 und durch 9 teilbar ist, ist sie auch durch 2, 3 und 6 teilbar. Jede Zahl ist durch 1 teilbar. Damit hat die Zahl n = 9867312 die geforderten Eigenschaften.