FÜMO 20 2. Runde Lösungen 8. Klasse

Aufgabe 1

Wir bezeichnen mit J bzw. M die Anzahl der befragten Jungen bzw. Mädchen. Gemäß den Bedingungen der Aufgabe erhalten wir dann:
Zahl der Jungen, die orange mögen: 0,02·J , Zahl der Mädchen, die orange mögen: 0,02·J ,
Zahl aller Befragten, die orange mögen: 0,17·(J+M).
Daraus ergibt sich die Bedingung 0,02·J+0,59·M = 0,17·(J+M) oder 2·J+59·M=17·J+17·M.
Eine weitere Vereinfachung liefert 5·J = 14·M oder M:J = 5:14.
Da M und J ganzzahlig sind, muss es ein ganzzahliges t geben mit J = 14·t und M = 5·t.
Wir suchen den kleinsten Wert für J+M = 19·t. Dieser wird für minimales t erreicht.

Nun ist auch 0,17·(J+M) = $\frac{17}{100}\cdot 19t = \frac{17\cdot 19}{100}\cdot t$ ganzzahlig. Da 17 und 19 Primzahlen sind, ist dies nur möglich, wenn 100 ein Teiler von t ist. Der kleinste Wert ist **t = 100**.
Es sind demnach J = 1400 Schüler und M = 500 Schülerinnen befragt worden.
Diese beiden Anzahlen erfüllen auch die Bedingungen der Aufgabe, denn 0,02·1400 = 28 und 0,59·500 = 295 sind ganzzahlige Werte.

Aufgabe 2

Ein Punkt P(m,n) wird genau dann erreicht, wenn das Gleichungssystem
(1) a – 2b = m (2) 3a – 4b = n eindeutig in nicht negativen ganzen Zahlen a und b lösbar ist.
Dabei bedeuten a bzw. b die Anzahl der Sprünge A bzw. B.

Wir subtrahieren das Dreifache von (1) von (2) und erhalten 2b = n – 3m bzw. $b = \frac{n-3m}{2}$

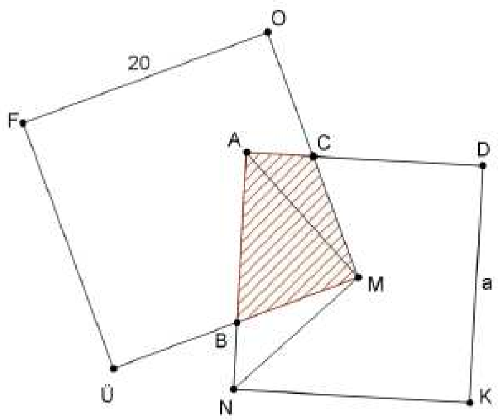
Eingesetzt z.B. in (1) ergibt sich daraus a = n – 2m.

a) Für (20;12) sind a = 12 – 2·20 = –28 und $b = \frac{12-60}{2}$ = –24 nicht positiv.
 Der Floh kann den Punkt P(20;12) niemals erreichen.

b) Das Gleichungssystem lautet nun (1) a – 2b = -19 und (2) 3a – 4b = 2011 mit den Lösungen a = 2049 und b = 1034. Der Floh kann den Punkt erreichen.

c) Nach der Vorüberlegung gibt es nicht negative ganzzahlige Lösungen (a;b) genau dann wenn
 n – 3m ≥ 0 und n - 3m gerade ist, d.h. n ≥ 3m und n - m = n - 3m + 2m gerade ist.
 Er kann also in den Punkten P(m | n) des I. Quadranten nicht landen,
 für die **n < 3m** oder **n - m ungerade** ist.

Aufgabe 3



a) ∢AMN, ∢NMK, ∢ KMD und ∢DMA bilden jeweils 90°Winkel, da auch an den Ecken von FÜMO 90°-Winkel sind, können höchstens zwei Ecken von DANK auf FÜMO liegen, aber niemals im Innern. Da a ≤ 20 ist, liegt auch mindestens eine Ecke im Inneren oder auf dem Rand von FÜMO.
 Bemerkung: Wäre $a > 20\sqrt{2}$, so könnten alle Ecken außerhalb von FÜMO liegen.

b) **1. Fall:** Zwei Ecken von DANK liegen auf FÜMO. Da die Diagonalen AK und ND das Quadrat DANK in vier kongruente Dreiecke zerlegt, liegt genau ein Viertel von DANK in FÜMO.

 2. Fall OBdA liegt die Ecke A innerhalb des Quadrates FÜMO. Dann sind die Dreiecke BNM und AMC nach WSW kongruent, weil der Winkel bei M, die halbe Diagonalenlänge und der Winkel bei A (Diagonale = Symmetrieachse = Winkelhalbierende des 90°-Winkels) gleich sind. Daher ist $A_{BMCA} = A_{ANM}$. Das bedeutet, dass der Flächeninhalt der schraffierten Fläche stets 25% vom Quadrat DANK beträgt.