

Lösungen FÜMO 20 1. Runde Klassenstufe 7

Aufgabe 1 Straßenzahlen

a) Sei $n = 3$. Dann lassen sich folgende 7 Arten drei aufeinanderfolgender Ziffern auswählen:
 1,2,3; 2,3,4; 3,4,5; 4,5,6; 5,6,7; 6,7,8 und 7,8,9.

Aus 1,2,3 lassen sich 6 Zahlen bilden: 123, 132, 213, 231, 312 und 321. Da dies auch für jede der anderen aufgeführten Dreierkombination gilt, kann man insgesamt $6 \cdot 7 = 42$ verschiedene dreistellige Zahlen bilden.

Ist n ($2 \leq n \leq 8$) beliebig, dann lassen sich $10-n$ Arten von n aufeinanderfolgenden Ziffern auswählen. Aus $1,2,\dots,n$ lassen sich $n!$ Zahlen bilden. Also erhält man insgesamt $N = n!(10-n)$ Zahlen.

Für die einzelnen Werte von n erhält man:

n	2	3	4	5	6	7	8	9
N	16	42	144	600	2880	15120	80640	362880

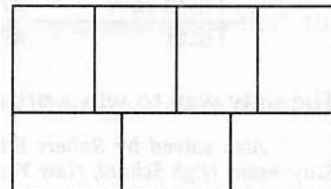
Als Summe ergibt sich: 462322. Damit gibt es 462322 S-Zahlen.

b) Eine vierstellige S-Zahl enthalte die vier aufeinanderfolgenden Ziffern $n, n+1, n+2$ und $n+3$ mit $1 \leq n \leq 6$. Ist die größte Ziffer durch 3 teilbar, also $n+3 = 3k$ mit $k \in \mathbb{N}$, so ist auch die Quersumme $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 3n + 3 + 3k = 3(n+1+k)$ durch 3 teilbar.

Damit ist eine vierstellige S-Zahl durch 3 teilbar, wenn ihre größte Ziffer durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 2 Parkett

Sei x die Breite und y die Länge der kleinen Rechtecke ($x < y$). Dann hat das große Rechteck die Maße $4x$ und $x+y$ und deshalb den Flächeninhalt $A = 4x(x+y) = 336$ (#).



1. Lösung:

Da die kleinen Rechtecke kongruent sind, haben sie denselben Flächeninhalt $A^* = 336 \text{ cm}^2 : 7 = 48 \text{ cm}^2$; also ist $x \cdot y = 48$.

Wegen (#) gilt: $4x^2 + 4xy = 336$; also $4x^2 + 4 \cdot 48 = 336$; also $4x^2 = 144$ bzw. $x^2 = 36$.

Daraus folgt $x = 6$ und $y = 8$. Der Umfang beträgt deshalb $[(6\text{cm}+8\text{cm}) + 6\text{cm} \cdot 4] \cdot 2 = 76 \text{ cm}$.

2. Lösung:

Offensichtlich gilt $4x = 3y$,

d.h. $x = \frac{3}{4}y$, in (#) eingesetzt: $3y(\frac{3}{4}y + y) = 336$ bzw. $3y \cdot \frac{7}{4}y = 336$; bzw. $\frac{21}{4}y^2 = 336$;

also $y^2 = 64$; d.h. $y = 8$ und $x = 3 \cdot 8 / 4 = 6$.

Der Umfang beträgt deshalb $[(6\text{cm}+8\text{cm}) + 6\text{cm} \cdot 4] \cdot 2 = 76 \text{ cm}$.

Aufgabe 3 Zahlenmonster

a) Es gibt 9 einstellige, 90 zweistellige und 556 dreistellige Seitennummern, insgesamt also $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 556 \cdot 3 = \underline{1857 \text{ Ziffern}}$.

b) Die Summe der einstelligen Zahlen beträgt $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$.

Ziffernsumme von 10 bis 99: $(1 \cdot 10 + 45) + (2 \cdot 10 + 45) + (3 \cdot 10 + 45) + \dots + (9 \cdot 10 + 45) = 855$
für 10 bis 19 20 bis 29 30 bis 39 ... 90 bis 99

Ziffernsumme von 100 bis 199: $1 \cdot 100 + (45 + 855) = 1000$
H-Ziffern Summe der Z- und E-Ziffern

Ziffernsumme von 200 bis 299: $2 \cdot 100 + (45 + 855) = 1100$

....

Ziffernsumme von 600 bis 655: $6 \cdot 56 + 45 + (10+45) + \dots + (40+45) + (5 \cdot 6 + 15) = 706$

Insgesamt ergibt sich die Ziffernsumme $45+855+1000+1100+1200+\dots+1400+706 = \underline{7606}$

c) Die Ziffernsumme bis 199 beträgt $45+855+1000 = 1900$,

bis 241: $1900 + 2 \cdot 42 + (1 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 4) + (4 \cdot 45 + 1) = 2233$
H-Ziffer Z-Ziffer E-Ziffern

Der Leser befindet sich auf Seite 241.

5

1.

5

5