

Lösungen FÜMO 18 1. Runde Klassenstufe 6

Aufgabe 1

- a) Anton kann durch seinen ersten Zug die Anzahl der Streichhölzer auf $7 \cdot k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$, mit $k = 5$ sind das hier 36 Streichhölzer) bringen. Im Folgenden nimmt er immer so viele Streichhölzer weg, dass mit Birgits Zug zusammen immer 7 Streichhölzer entfernt werden (z.B. Birgit 3 Anton 4). So bleibt am Schluss für Birgit das letzte Streichholz liegen und sie verliert.
- b) Wenn Birgit die Anfangszahl auf $7 \cdot k + 1$ (mit $k > 5$, also 43, 50, 57, 64, 71 ...) Streichhölzer erhöht, kann sie die Anzahl der von Anton entfernten Streichhölzer durch ihren Zug auf 7 ergänzen und für Anton bleibt das letzte Streichholz. Also sollte sie $7 \cdot k + 3$ Streichhölzer dazulegen, d.h. 3, 10, 17, 24, 31 ... Streichhölzer.

Aufgabe 2

- a) Zur 9 sind nur die Zahlen 3, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 15, 18 und 27 verwandt, alle anderen nicht!

Begründung:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Summe S	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
pos. Differenz D	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
Ergebnis S : D	x	x	2	x	x	5	8	17	x	19	10	7	x	x
n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
Summe S	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
pos. Differenz D	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
Ergebnis S : D	4	x	x	3	x	x	x	x	x	x	x	x	2	

Wird die Zahl größer als 27, wird der Dividend kleiner als das Doppelte des Divisors und der Quotient kann nicht mehr den Wert 2 annehmen: z.B. $9 + 28 = 37 < 2 \cdot (28 - 9) = 38$.

- b) Zu 2009 sind verwandt: 2007 (Differenz $D = 2$), 2008 ($D = 1$), 2010 ($D = 1$) und 2011 ($D = 2$), 4018 ($D = 2009$) und 6027 ($D = 4018$ und 4018 teilt $2009 + 6027 = 8036$).
Ist $n > 2$ eine beliebige natürliche Zahl, dann sind wegen $D = 1$ die um 1 größere und die um 1 kleinere Zahl zu ihr verwandt. Aber auch die um 2 größere und die um 2 kleinere Zahl sind zu n verwandt, da die Summe jeweils gerade und damit durch $D = 2$ teilbar ist. Die Zahlen $2 \cdot n$ und $3 \cdot n$ sind ebenfalls zu n verwandt, da $2 \cdot n + n$ durch $D = n$ und $3 \cdot n + n$ durch $D = 2 \cdot n$ teilbar sind.

Aufgabe 3

- a) Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn sich die Summe der Ziffern an ungeraden Stellen und die Summe der Ziffern an geraden Stellen um ein ganzzahliges Vielfaches von 11 unterscheiden.

- b) Die Zahl $z = \underline{5}84\underline{1}39\underline{2}314\underline{0}7\underline{1}6$ ist durch 396 teilbar.

Begründung: Wegen $396 = 11 \cdot 4 \cdot 9$ und der Teilerfremdheit dieser Faktoren muss nur gezeigt werden, dass 4, 9 und 11 die Zahl z teilen.

4 teilt sicher z , da die Zahl auf 16 endet und 16 ein Vielfaches von 4 ist.

Die Quersumme $QS(z) = 5+8+4+1+3+9+2+3+1+4+0+7+1+6 = 54$ ist durch 9 teilbar, also auch die Zahl z .

Die Summe an den geraden Stellen beträgt $8+1+9+3+4+7+6=38$ und die an den ungeraden Stellen beträgt $5+4+3+2+1+0+1=16$; deren Differenz ist 22, weshalb z nach obiger Regel durch 11 teilbar ist.

- c) Da alle Leerstellen auf ungeraden Positionen sind, ist für jede Einsetzung der erlaubten Ziffern die Zahl z durch 9 und durch 11 teilbar.

An der vorletzten Stelle führen nur die Ziffern 1, 3 und 5 zu einem Vielfachen von 4. Ist eine davon ausgewählt, so können auf die 1. Stelle nur noch vier der verbleibenden fünf Ziffern (0 steht nicht am Anfang!) gesetzt werden. Die restlichen vier Stellen werden durch die noch nicht verwendeten Ziffern besetzt; dafür gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschiedene Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es somit $3 \cdot 4 \cdot 24 = \underline{288}$ verschiedene Lösungen der obigen Aufgabe.