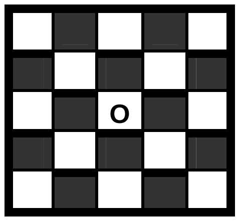
Lösungen FÜMO 17 2. Runde Klassenstufe 5

Aufgabe 1



a) Leicht findet man nebenstehendes Muster: 1

b) Man erhält dasselbe Muster wie in a).

Begründung:

1. Zuerst wird gezeigt, dass sich die Figur nach 2009 Zügen auf einem schwarzen Feld befinden muss:
   Für jedes Ausgangsfeld gilt: Nach einem Zug der Figur hat das neue Feld eine andere Farbe. D.h. nach zwei Zügen hat das neue Feld dieselbe Farbe wie das Ausgangsfeld.
   Nach dem ersten Zug steht die Figur auf einem schwarzen Feld. Da 2008 = 2009 – 1 gerade ist, befindet sich die Figur nach weiteren 2008 Zügen wieder auf einem schwarzen Feld. 4
2. Nun wird gezeigt, dass jedes schwarze Feld des Musters von a) nach 2009 Zügen auch erreicht werden kann:
   Nach drei Zügen kann jedes der schwarzen Felder erreicht werden.
   In den verbleibenden 2006 Zügen bewegt man nun die Figur von diesem Feld aus 1003mal auf ein Nachbarfeld und wieder zurück.

Aufgabe 2

a) Die neun einstelligen Zahlen ergeben die ersten 9 Ziffern, die 90 zweistelligen Zahlen die nächsten 180 Ziffern. Die restlichen 2009 – 189 = 1820 Ziffern stammen von dreistelligen Zahlen. Wegen 1820 : 3 = 606 Rest 2 ist an 2009-ter Stelle die zweite Ziffer der 607-ten dreistelligen Zahl, also die 0 von 706. An der 2009-ten Stelle steht also eine 0.

b) In jeder Hunderterschaft, wie z.B. 100, …, 199, taucht die „2“ zehnmal als Zehner- und zehnmal als Einerziffer auf. Bei 200, …, 299 gibt es zusätzlich noch 100 Zweien auf der Hunderterstelle. Damit treten bis 1999 $20 \cdot 20 + 2 \cdot 100 = 600$ Ziffern „2“ auf. Bei den Zahlen 2000 bis 2009 kommen noch elf Zweier dazu, weshalb insgesamt 611 Ziffern „2“ auftreten. 5

c) Fünf Ziffern „2“ treten zum ersten Mal in der Folge 221, 222, 223 auf.
Die gesuchte „2“ ist die erste Ziffer nach der 122-ten dreistelligen Zahl.
Ihre Stellennummer lautet damit: $9 + 180 + 122 \cdot 3 + 1 = 556$.

Aufgabe 3

a) Zunächst untersucht man, ob 2009 eine Quadratzahl als Faktor enthält.
Man erhält die Zerlegung $2009 = 7 \cdot 287 = 7 \cdot 7 \cdot 41 = 7^2 \cdot 41$.
Die kleinste Zahl, die mit 2009 multipliziert eine Quadratzahl ergibt, ist also 41:
$2009 \cdot 41 = 7 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 41 = 7 \cdot 41 \cdot 7 \cdot 41 = 287^2$.
Die zwei nächstgrößeren Quadratzahlen, die 2009 als Faktor enthalten sind deshalb
$2009 \cdot 41 \cdot 4 = 7 \cdot 41 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 2 \cdot 2 = 574^2$ und $2009 \cdot 41 \cdot 9 = 7 \cdot 41 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 3 \cdot 3 = 861^2$. 5
Die gesuchten zu 2009 quadrofonen Zahlen sind dann $41 \cdot 4 = 164$ und $41 \cdot 9 = 369$.

b) Simon hat nicht Recht! Wegen $(2009 \cdot 100)^2 = 2009 \cdot 20090000$ sind 2009 und 20090000 quadrofon, aber 20090000 > 1000000. Es gibt beliebig große Zahlen, die zu 2009 quadrofon sind.

c) Simon nimmt einfach alle zweistelligen Quadratzahlen: 16, 25, 36, 49, 64 und 81.
Jede dieser Zahlen ist zu jeder anderen quadrofon, da zwei Quadratzahlen miteinander multipliziert wieder eine Quadratzahl ergeben.