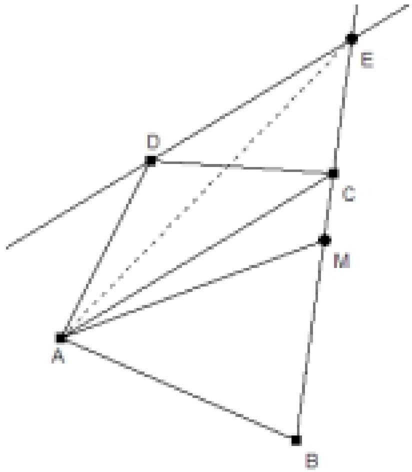
Lösungen FÜMO 16 2. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1 (5 Punkte)

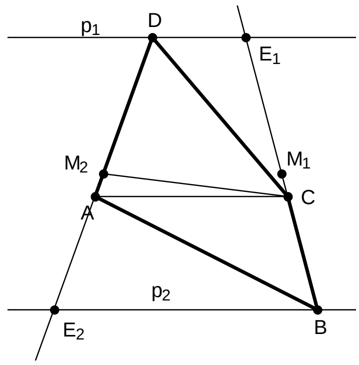


a) Es wird gezeigt, dass folgende Aussagen gleichwertig sind:
  (1) M liegt auf der Strecke [BC].
  (2) Die Fläche des Dreiecks ACD ist nicht größer als die Fläche des Dreiecks ABC.
  (3) Der Flächeninhalt des Vierecks ABCD wird durch [AM] halbiert.

Liegt M auf [BC], so sind die Dreiecke ACD und ACE flächengleich (gleiche Grundlinie [AC] und wegen AC II DE gleiche Höhe). AM ist Seitenhalbierende im Dreieck ABE und zerlegt dieses in zwei gleiche Hälften (Eigenschaft der Seitenhalbierenden!).

Also gilt: $A_{ABM} = A_{AME} = A_{AMC} + A_{ACE} = A_{AMC} + A_{ACD}$ (vgl. Bild rechts).

Liegt M nicht auf [BC], also auf [CM] mit $M \neq C$,
so gilt wie oben: $A_{ACE} = A_{ACD}$.
Offensichtlich ist deshalb in diesem Fall $A_{ABC} < A_{ACD}$.



b) Ist $A_{ACD} > A_{ABC}$, liegt M nicht auf [BC]. In diesem Fall führt man die obige Konstruktion nicht am Dreieck ACD, sondern am Dreieck ABC aus (Parallele p_2 durch B zu AC schneidet AD in E_2, C mit M_2 verbinden, vgl. Bild rechts).

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zunächst wird gezeigt, dass sich die Zahl $n_0 = 2007 \cdot 2008$ nicht in der geforderten Form darstellen lässt:

$n_0 = 2007 \cdot 2008 = (2007 - k) \cdot 2008 + k \cdot 2008 = (2007 - k) \cdot 2007 + k \cdot 2008 + \mathit{(2007 - k)}$

mit $1 \leq k < 2007$ (2007 – k erfasst dabei alle möglichen Faktoren von 2007).

Da $1 \leq 2007 - k < 2007$, ist *2007 – k* nicht durch 2007 und nicht durch 2008 teilbar.

Da außerdem $k < 2007$ und $k \geq 1$, ist n_0 nicht wie gefordert darstellbar.

Nun wird gezeigt, dass jede Zahl $n > n_0$ in der geforderten Weise darstellbar ist.

Für jede Zahl $n > n_0$ kann man schreiben:

$n = 2007 \cdot 2008 + 2008 \cdot q + r$ mit $q \geq 0$ und $1 \leq r < 2008$, d.h.

$n = 2007 \cdot 2008 + 2008 \cdot q + r \cdot (2008 - 2007) =$

$= 2007 \cdot 2008 + 2008 \cdot q + 2008 \cdot r - 2007 \cdot r = 2007 \cdot (2008 - r) + 2008 \cdot (q + r)$.

Da $2008 - r \geq 1$ und $q + r \geq 1$ ist jedes $n > N$ in der geforderten Weise darstellbar.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Der kleinste Summenwert s von n unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist

$s = 1+2+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ (Gauß-Formel). Wir schätzen n ab.

Angenommen, diese (minimale) Summe s hat den Summenwert s = 1615. Dann erhalten wir nach Umformung die Identität $n^2+n = 3230$. Wegen $56^2 + 56 = 3192 < 3230$ und $57^2 + 57 = 3306 > 3230$, muss n = 56 sein.

Der größte Summenwert S der restlichen Nummern ist

$(n+1)+(n+2)+\ldots+2n = n\cdot n + \frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{2n^2+n^2+n}{2} = \frac{3n^2+n}{2} = \frac{n\cdot(3n+1)}{2}$.

Angenommen, der (maximale) Summenwert S ist 1615.

Durch Umformung ergibt sich die Identität $3n^2+n = 3230$.

Nun ist $3\cdot32^2+32 = 3104 < 3230$ und $3\cdot33^2+33 = 3300 > 3230$, also ist in diesem Fall n = 33.

Die kleinste der entfernten n Zahlen sei k. Dann gilt für die Summe aller übrigen Zahlen:

$(1+2+\ldots+2n) - [k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+n-1)] = \frac{2n\cdot(2n+1)}{2} - \frac{(2k+n-1)\cdot n}{2} = 1615.$

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit $\frac{2}{n}$ und stellt geeignet um, so ergibt sich

$4n+2-(2k+n-1) = 3n-2k+3 = \frac{3230}{n}$ und damit $k = 3n+3-\frac{3230}{n}$.

Da 3n-2k+3 ganzzahlig sein muss, kann $\frac{3230}{n}$ ebenfalls nur ganzzahlig sein.

Die Teiler von 3230 sind 1, 2, 5, 10, 17, 19, 34, 38, 85, 95, 170, 190, 323, 646, 1615 und 3230. Die einzigen Teiler zwischen 33 und 56 sind 34 und 38.

Die zugehörigen Werte für k sind daher $\frac{1}{2}\cdot\left(3\cdot34+3-\frac{3230}{34}\right) = 5$ bzw. $\frac{1}{2}\cdot\left(3\cdot38+3-\frac{3230}{38}\right) = 16$.

Marcel könnte demnach 34 oder 38 Zettel entfernt haben.