

Lösungen 15. FÜMO 2006/2007 1. Runde Klassenstufe 7

Aufgabe 1 (Lösung)

a) $1+2+\dots+9=45$; \Rightarrow 4 ist nicht Teiler von 45
 \Rightarrow Es gibt kein Quadrat bei Verwendung aller 9 Stäbchen (1P)

b) Wegen a) darf man höchstens 8 Stäbchen verwenden. Verwendet man für eine Seite 3 Stäbchen, so muss mindestens eine Seite von einem Stäbchen gebildet werden. Diese Seite ist dann 8cm oder 9cm lang.

Wegen $8=1+2+5=1+3+4$ und $8=1+7=2+6=3+5$ lassen beide Dreierkombinationen keine zwei verschiedenen Zweierkombinationen mehr zu.

Wegen $9=1+2+6=1+3+5=2+3+4$ und $9=1+8=2+7=3+6=4+5$ lässt keine der drei Dreierkombinationen zwei verschiedenen Zweierkombinationen mehr zu.

Man kann daher kein solches Quadrat bilden. (2P)

c) Damit verbleiben nur folgende neun Lösungen:

$7 / 1+6 / 2+5 / 3+4$ $8 / 1+7 / 2+6 / 3+5$ $9 / 1+8 / 2+7 / 3+6$ $9 / 1+8 / 2+7 / 4+5$
 $9 / 1+8 / 3+6 / 4+5$ $9 / 2+7 / 3+6 / 4+5$ $1+8 / 2+7 / 3+6 / 4+5$
 $1+9 / 2+8 / 3+7 / 4+6$ $2+9 / 3+8 / 4+7 / 5+6$ (2P)

Aufgabe 2 (Lösung)

Die fünf Zahlen lassen sich nach dem Rest, den man bei Division durch 3 erhält, in drei Gruppen einteilen: Rest 0, Rest 1, Rest 2. (1P)

Fall1: In jeder Gruppe liegt wenigstens eine Zahl. Nimmt man aus jeder Gruppe nun eine Zahl, so liefert die Summe bei Division durch 3 den Rest 0. (2P)

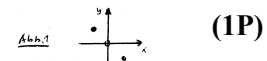
Fall2: In einer Gruppe liegt keine Zahl. Dann müssen in einer der beiden anderen Gruppen mindestens 3 Zahlen liegen. Wählt man 3 Zahlen aus der Gruppe mit mindestens drei Zahlen, so liefert Summe den Rest 0. (2P)

Aufgabe 3 (Lösung)

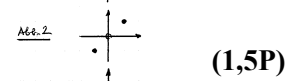
e_x bzw. e_y bedeutet einen Schritt um eine Einheit in x- bzw. y-Richtung

Fall 1 und 2:

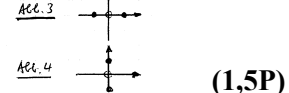
$$\pm \left[(2e_x + 3e_y) + (-3e_x - 2e_y) \right] = \pm (-e_x + e_y) = \begin{cases} -e_x + e_y \\ +e_x - e_y \end{cases}$$



Fall 3: $\pm \left[\begin{aligned} &(3e_x + 2e_y) + (2e_x - 3e_y) + (-3e_x + 2e_y) + \\ &+ (2e_x - 3e_y) + (-3e_x + 2e_y) \end{aligned} \right] = \pm e_x$



Fall 4: $\pm \left[\begin{aligned} &(2e_x + 3e_y) + (-3e_x + 2e_y) + (2e_x - 3e_y) + \\ &+ (-3e_x + 2e_y) + (2e_x - 3e_y) \end{aligned} \right] = \pm e_y$



\Rightarrow Alle zum Ursprung benachbarten Gitterpunkte sind erreichbar

\Rightarrow Von den neu erreichten Punkten kann entsprechend weitersprungen werden.

\Rightarrow Alle Gitterpunkte sind erreichbar (1P)