Lösungen 10. FÜMO 1. Runde Klassenstufe 6

Aufgabe 1 (Lösung)

Im ungünstigsten Fall benötigt der Hoteldiener für die erste Tür 49 „Schlüsselproben". (Sperren 49 Schlüssel nicht, so ist automatisch der übriggebliebene richtig!) Für die zweite Tür sind höchstens noch 48 „Proben" und für die dritte noch 47 Tests nötig u.s.w.
Insgesamt müssen also im ungünstigsten Fall 49 + 48 + 47 + ... + 3 + 2 + 1 = 1225 „Schlüsselproben" durchgeführt werden. (4P)

Aufgabe 2 (Lösung)
Bei dieser Aufgabe nach Peter Apian (1495 - 1552) wurde zu Recht die Diskriminierung von Frauen beanstandet. Dies war nicht beabsichtigt. Vielmehr freuen wir uns über einen hohen Anteil von teilnehmenden Mädchen und hoffen, dass diese auch weiterhin fleißig mitknobeln.

a) Die Mutter erbt dreimal so viel wie die Tochter und der Sohn (ungerechterweise?) neunmal so viel wie seine Schwester. Zerlegt man das Erbe in 3+1+9 = 13 Teile zu je 91 000 DM : 13 = 7 000 DM, so erhält die Tochter einen Teil, also 7000 DM; die Mutter bekommt 3•7000 DM = 21000 DM und der Sohn den Rest von 63000 DM. (2P)
b) Bezeichnet man wieder das Erbe einer Tochter als einen „Teil", so beträgt dieses 19500 DM : 3 = 6500 DM. Wegen 91 000 DM : 6500 DM = 14 ist das Erbe in 14 Teile zu zerlegen, wovon die Mutter 3 Teile erhält und die drei Kinder noch 11 Teile. Diese 11 Teile lassen sich im Sinne der Aufgabe nur in 1•9 + 2•1 Teile zerlegen, weshalb die Drillinge zwei Mädchen und ein Junge sind. (3P)

Aufgabe 3 (Lösung)

a) Die größtmögliche Prüfsumme erhält man, wenn die ersten neun Ziffern den Wert 9 haben: PS(9999 999 998) = 9•10+9•9+9•8+9•7+9•6+9•5+9•4+9•3+9•2+8•1 =
9• (10 +9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2) + 8 = 9•54 +8 = 486 + 8 = 494. Da 494 kein Vielfaches von 11 ist (9999 999 998 ist also keine ISBN-Zahl!), muss diese Prüfsumme auf die nächstkleinere durch 11 teilbare Zahl, nämlich 484 = 44 · 11, gebracht werden. (Eine mögliche ISBN-Zahl mit dieser Prüfsumme ist z. B. 8999 999 998.) (2P)
b) 3•10 + 4•9 + 0•8 + 1•7 + 10•1 = 83. Zu 88 bzw. 99, den nächsten höheren Vielfachen von 11, fehlen noch 5 bzw. 16. Da die ungerade Zahl 5 mit der vorletzten Ziffer allein nicht erreicht werden kann, benötigt man hierzu auch die drittletzte Ziffer (1•3 +1•2 = 5). Dagegen kann 16 durch eine 8 auf vorletzter Stelle erzeugt werden. (Die anderen unbestimmten Ziffern sind 0.) Die gesuchte ISBN-Zahl lautet also: 3401 000 08X . (Die Lösung 3401 000 11X wird auch als richtig angesehen.) (1P)
c) Eine alleinige Veränderung der Kontrollziffer bringt die Prüfsumme nicht mehr auf ein Vielfaches von 11. Da die vorletzte Ziffer 0 nicht verkleinert kann, muss die drittletzte Ziffer auf 1 gesenkt werden und dafür die vorletzte Ziffer möglichst groß werden. Durch die Absenkung von 2 auf 1 verkleinert sich die Prüfsumme um 3, was mit Hilfe der vorletzten Ziffer und der Kontrollzahl aufgehoben werden muss. Weil die vorletzte Ziffer möglichst groß sein soll, verringert man auch die Kontrollzahl so, dass die gesamte Verkleinerung der Prüfsumme durch eine hohe vorletzte Ziffer ausgeglichen werden kann. In diesem Beispiel kann man die Kontrollziffer um 7 verkleinern, so dass die gesamte Prüfsumme um 3 + 7 = 10 abnimmt, was durch eine 5 an vorletzter Stelle ausgeglichen wird. Die Lösung lautet somit: 3527 735 151. (3P)