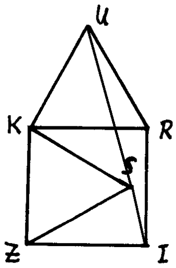
Lösungen FÜMO 9 1. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1 (Lösung):

Die Zahl n ist keine Quadratzahl. Begründung: n hat die Quersumme 2001 und ist daher durch 3, aber nicht durch 9 teilbar. Zerlegt man eine Quadratzahl in Primfaktoren, so kommt jeder Primfaktor doppelt vor. Wäre n eine Quadratzahl, so müsste n also nicht nur durch 3, sondern auch durch 9 teilbar sein. (4 Punkte)

Aufgabe 2 (Lösung):



Die gleichseitigen Dreiecke ΔZSK und ΔKRU besitzen je drei 60° -Winkel.

Wir zeichnen die Strecke [US] ein und betrachten Dreieck ΔKSU.
$\angle SKR = \angle ZKR - \angle ZKS = 90° - 60° = 30°$.
$\angle SKU = \angle SKR + \angle RKU = 30° + 60° = 90°$.

ΔKSU ist also rechtwinklig. Wegen $\overline{KS} = \overline{KU}$ ist ΔKSU auch gleichschenklig.
Daraus folgt: $\angle USK = 45°$

Wir zeichnen die Strecke [SI] ein und betrachten Dreieck ΔZIS.

Auch dieses Dreieck ist gleichschenklig wegen $\overline{ZI} = \overline{ZS}$, besitzt daher gleich große Basiswinkel. Der Winkel an der Spitze beträgt: $\angle IZS = 30°$ (analog zu $\angle SKR$).
Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck ΔZIS folgt: $\angle ZSI = (180° - 30°) : 2 = 75°$.

Insgesamt folgt: $\angle USI = \angle USK + \angle KSZ + \angle ZSI = 45° + 60° + 75° = 180°$.

$\angle USI$ ist ein gestreckter Winkel, d.h., der Punkt S liegt auf der Gerade UI. (5 Punkte)

Aufgabe 2 (Lösung):

Wir erweitern bequemerweise die Definitionsmenge auf $\mathbb{N}_0$ und betrachten zunächst nur den Bereich x = 0 bis 109 mit Hilfe einer Wertetabelle:

x	0	1	...	9	10	11	12	...	19	20	21	22	23	...	109
$\left[\frac{x}{10}\right]$	0	0	...	0	1	1	1	...	1	2	2	2	2	...	10
$\left[\frac{x}{11}\right]$	0	0	...	0	0	1	1	...	1	1	1	2	2	...	9
$\left[\frac{x}{10}\right]-\left[\frac{x}{11}\right]$	0	0	...	0	**1**	0	0	...	0	**1**	**1**	0	0	...	**1**

Der Wert von $\left[\frac{x}{10}\right]$ erhöht sich um 1 bei x=10, 20, 30, 40,.... Der Wert von $\left[\frac{x}{11}\right]$ erhöht sich "verzögert" bei x=11, 22, 33, 44,... Die Differenz dieser beiden Werte beträgt 0 oder 1. Daher wird die Gleichung im betrachteten Bereich von folgenden x-Werten erfüllt: x=10, 20, 21, 30, 31, 32, 40, 41, 42, 43, 50,...,100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109. Anzahl der Lösungen: 1 + 2 + 3 + ... + 9 + 10 = 55. Das ist die Hälfte der 110 Zahlen von 0 bis 109.

Wir betrachten nun die nächsten 110 x- Werte von 110 bis 219. Es gilt $\left[\frac{x+110}{10}\right]=\left[\frac{x}{10}\right]+11$ und $\left[\frac{x+110}{11}\right]=\left[\frac{x}{11}\right]+10$.

x	110	111	...	119	120	121	122	...	129	130	131	132	133	...	219
$\left[\frac{x}{10}\right]$	11	11	...	11	12	12	12	...	12	13	13	13	13	...	21
$\left[\frac{x}{11}\right]$	10	10	...	10	10	11	11	...	11	11	11	12	12	...	19
$\left[\frac{x}{10}\right]-\left[\frac{x}{11}\right]$	**1**	**1**	**...**	**1**	2	**1**	**1**	**...**	**1**	2	2	**1**	**1**	...	2

Die Differenz der Werte beträgt nun 1 oder 2. Wo in der untersten Zeile der ersten Wertetabelle 0 eingetragen ist, erscheint nun (110 Zahlen weiter) eine 1, wo eine 1 eingetragen ist, erscheint eine 2. Daher sind wieder die Hälfte der 110 Zahlen von 110 bis 219 Lösungen. Das sind nochmals 55 Stück.

Betrachtet man abschnittweise die jeweils nächsten 110 Zahlen von 220 bis 329, von 330 bis 439 usw., erhält man analog als Differenzwerte in der letzten Zeile der Wertetabelle 2 oder 3 bzw. 3 oder 4, usw., also keine weiteren Lösungen der Gleichung. Insgesamt erhält man also **110 Lösungen** der vorgegebenen Gleichung.
(6 Punkte)