Sechste Fürther Mathematik-Olympiade

Klassenstufe 11
Die Aufgaben der 2. Runde

Aufgabe 1:
Gegeben ist ein Polynom p: $x \rightarrow p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ mit den beiden Eigenschaften

i) Alle Koeffizienten a_0, a_1, …, a_n sind ganze Zahlen
ii) p(x) nimmt den Funktionswert 1991 für vier verschiedene ganzzahlige x-Werte an.

Zeige: Es gibt kein $x \in \mathbb{Z}$ mit $p(x) = 1998$.

Aufgabe 2:
Eine Funktion f ist für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ definiert und genügt den beiden Bedingungen

i) $f(1) = 999$
ii) $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2 \cdot f(n) \quad (n > 1)$.

Berechne den Funktionswert f(1998).

Aufgabe 3:
Gegeben ist ein Dreieck ABC. Errichte auf der Seite AB ein Quadrat (nach außen) mit Mittelpunkt O.

M und N seien die Seitenmitten von [AC] (Länge b) bzw. [BC] (Länge a).

Bestimme den größten Wert (in Abhängigkeit von a und b), den die Summe der Streckenlängen $\overline{OM} + \overline{ON}$ annehmen kann, wenn sich der Winkel an der Ecke C des Dreiecks ändert.

Abgabeschluß beim betreuenden Lehrer ist der 15. 5. 1998 (2. Runde).
Für jede Aufgabe ist ein gesondertes Blatt DIN A4 zu verwenden, das mit Namen, Klasse und Schule zu versehen ist.
Zu einer vollständigen Lösung gehört die Angabe und Begründung aller wesentlichen Zwischenschritte.
Auf verwendete Literatur ist hinzuweisen. Die genauen Teilnahmebedingungen sind beim betreuenden Lehrer erhältlich.
Den Lösungen ist der folgende Zettel beizufügen:

✂---

Ich nehme an der 6. Fürther Mathematik-Olympiade (1997/98), Klassenstufe 11, 2. Runde teil.

Vorname, Name: ____

Klasse:_____ Schule/Ort:____

Ich bestätige hiermit, alle Aufgaben selbständig gelöst zu haben.

Unterschrift: ______________________________