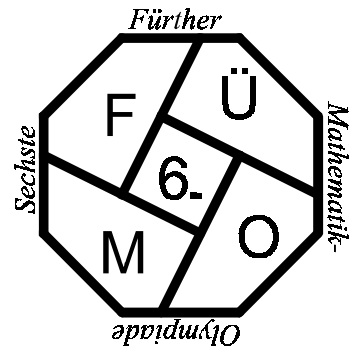


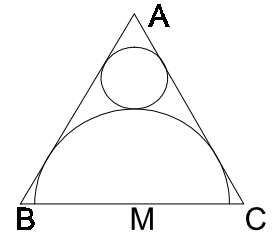
Sechste Fürther Mathematik-Olympiade



Klassenstufen 9 / 10 Die Aufgaben der 1. Runde

Aufgabe 1:

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$. Sei M die Mitte der Seite $[BC]$. Der Halbkreis K um M mit Radius R berührt die Seiten $[AB]$ und $[AC]$ des Dreiecks. Der Kreis k mit Radius r berührt den Halbkreis K und die Seiten $[AB]$ und $[AC]$ des Dreiecks. Ermittle das Verhältnis $R : r$ der Radien. (Beweis!)



Aufgabe 2:

Sei n eine natürliche Zahl größer 1. Gegeben sei eine Menge M von n Quadraten in der Ebene mit folgenden Eigenschaften:

- Jedes Quadrat aus M hat die Seitenlänge 1.
- Je zwei Quadrate aus M besitzen zueinander parallele Seiten.
- Der Abstand der Mittelpunkte je zweier Quadrate aus M ist nicht größer als 2. (Der Mittelpunkt eines Quadrats ist der Schnittpunkt seiner Diagonalen.)

Die Quadrate dürfen sich überlappen.

Beweise:

Es gibt ein Quadrat Q mit Seitenlänge 1 und zu den Seiten der Quadrate aus M parallelen Seiten, das mit jedem der Quadrate aus M mindestens einen Punkt gemeinsam hat. (Q muss nicht aus M sein.)

Aufgabe 3:

Sei $T(n) = \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$. Wir bilden für $n = 2, 3, 4, \dots, 100$ die Brüche $T(2) = \frac{7}{9}$, $T(3) = \frac{26}{28}$, ... usw.

Zeige: Das Produkt dieser 99 Brüche ist größer als $\frac{2}{3}$. (Kein „Computer-Beweis“ erlaubt!)

Abgabeschluß beim betreuenden Lehrer ist der 15. 12. 1997 (1. Runde).

Für jede Aufgabe ist ein gesondertes Blatt DIN A4 zu verwenden, das mit Namen, Klasse und Schule zu versehen ist.

Zu einer vollständigen Lösung gehört die Angabe und Begründung aller wesentlichen Zwischenschritte.

Auf verwendete Literatur ist hinzuweisen. Die genauen Teilnahmebedingungen sind beim betreuenden Lehrer erhältlich.

Den Lösungen ist der folgende Zettel beizufügen:

✂-----

Ich nehme an der 6. Fürther Mathematik-Olympiade (1997/98), Klassenstufen 9/10, 1. Runde teil.

Vorname, Name: _____

Klasse: _____ Schule/Ort: _____

Ich bestätige hiermit, alle Aufgaben selbständig gelöst zu haben.

Unterschrift: _____