

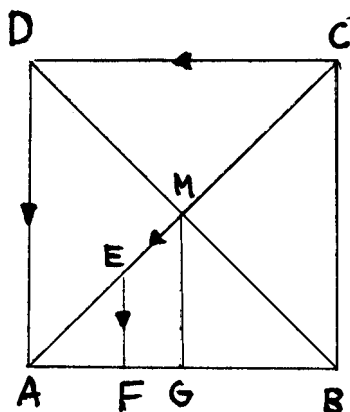
# Sechste Fürther Mathematik-Olympiade

Klassenstufe 11

Die Lösungen der 1. Runde

## Lösung Aufgabe 1

Das Mädchen kann der Lehrerin entweichen. Gemäß Zeichnung gilt nämlich:



Die Lehrerin stehe an der Ecke C. Folgender Fluchtweg ist für die Schülerin günstig: Es schwimmt in M (diagonal) in Richtung A los. Im selben Moment läuft die Lehrerin in Richtung Ecke D (oder B). Wenn sie Ecke D erreicht hat, soll sich die Schülerin in E befinden. Danach schwimmt sie rechtwinklig auf den Beckenrand AB zu.

**Begründung zu dieser Wegwahl:**

Es sei  $\overline{CD} = 1 \Rightarrow \overline{BC} = \frac{1}{3}$ , da  $v_L = 3 \cdot v_S$ .

$\overline{CA} = \sqrt{2}$  (Diagonalenlänge)  $\Rightarrow \overline{EA} = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} > 0$ .

Bestimmung von  $\overline{EF}$  mit Strahlensatz (denn  $EF \perp AB$ ):

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{MG}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{MA}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \overline{EF} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Die Lehrerin kann nur nach A rennen. Aber sie erreicht Ecke A *nicht bevor* die Schülerin am Beckenrand in F bereits angekommen ist, denn nach Zeitvergleich gilt ( mit  $v_L = 3 \cdot v_S$ ):

$$t_L - t_S = \frac{1}{3v_S} - \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)}{v_S} = \frac{1}{v_S} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) = \dots = \frac{1}{v_S} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{6} > 0 \Rightarrow$$

$t_L > t_S \Rightarrow$  Beh.

## Lösung Aufgabe 2

Es gelte:  $n = 3x^2 + 32y^2$ .

Daraus:  $96n = 96 \cdot 3x^2 + 96 \cdot 32y^2 = 3 \cdot 32 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 32 \cdot 32y^2 = 3 \cdot (32y)^2 + 32 \cdot (3x)^2$ .

Der Term  $96n$  besitzt also ebenfalls die Darstellung  $3 \cdot x_1^2 + 32y_1^2$  mit  $x_1 = 32y$  und  $y_1 = 3x$ .

Nun ist  **$97 \cdot n = n + 96 \cdot n$**

$$\begin{aligned} &= 3x^2 + 32y^2 + 3(32y)^2 + 32(3x)^2 = \\ &= 3[x^2 + (32y)^2] + 32[y^2 + (3x)^2] = \\ &= 3[(x+32y)^2 - 64xy] + 32[y^2 + (3x)^2] = \text{(Qu. Erg.)} \\ &= 3[(x+32y)^2] - 192xy + 32[y^2 + (3x)^2] = \\ &= 3[(x+32y)^2] - 32 \cdot 6xy + 32[y^2 + (3x)^2] = \\ &= 3(x+32y)^2 + 32 \underbrace{[y^2 - 6xy + (3x)^2]}_{\text{binom. Formel}} = \end{aligned}$$

$$= 3(x+32y)^2 + 32(y-3x)^2 =$$

$$= 3 \cdot x_2^2 + 32 \cdot y_2^2 \text{ mit geeigneten positiven Zahlen } x_2 = x+32y \text{ und } y_2 = y-3x.$$

$\Rightarrow 97 \cdot n$  ist günstig.