Fünfte Fürther Mathematik-Olympiade

Klassenstufe 11 Die Lösungen der 2. Runde

Aufgabe 1

Die Zahlenfolge ist eine arithmetische Folge mit dem Bildungsgesetz $a_n = (n+1)\cdot 1997 - 1$.
Das erste Glied der Folge ist $a_0 = 1996 + 0\cdot 1997$.
Die Folgenglieder $a_{10\,000}$, $a_{100\,000}$, $a_{1\,000\,000}$, ... besitzen jeweils die gleiche Quersumme, denn
$a_{10\,000} = 1996 + 10\,000\cdot 1997 = 19\,971\,996$ [QS 51]
$a_{100\,000} = 1996 + 100\,000\cdot 1997 = 199\,701\,996$ [QS 51]
$a_{1\,000\,000} = 1996 + 1000\,000\cdot 1997 = 1\,997\,001996$ [QS 51]
$\therefore$
Selbst wenn keine weiteren Folgenglieder mit gleicher QS zwischen den angegebenen liegen, gibt es dennoch unendlich viele mit der QS 51. **(5 P)**

Aufgabe 2

Es seien o.B.d.A. c die Länge der kürzesten Seite und h_c die Länge der zugehörigen Höhe. Das Dreieck habe den Flächeninhalt A. Da sich in einem bel. Dreieck die Längen der Höhen umgekehrt wie die entsprechenden Seitenlängen verhalten, ergibt sich daraus die Beziehung $h_c = h_a + h_b$.
Mit $A = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b \Rightarrow \frac{2A}{c} = \frac{2A}{a} + \frac{2A}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{a+b}{ab}$.
Mittels geeigneter algebraischer Umformungen erhalten wir daraus der Reihe nach

$ab - ac - bc = 0$; $2ab - 2(a+b)c = 0$ und durch Addition von $a^2 + b^2 + c^2$ auf beiden Seiten schließlich :

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{oder} \quad (a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 .$$

Der Term $a^2 + b^2 + c^2$ ist damit das Quadrat der positiven ganzen Zahl $a + b - c$. **(5P)**

Aufgabe 3

Es bezeichne x die Anzahl der Tage zwischen zwei Anzeigen (Wir betrachten also einen Zyklus der Art $A\underbrace{VVV\ldots.V}_{x}A$,wobei A ein Anzeigentag ist und V ein reiner Verkaufstag).
Die Summe der Tagesgewinne in einem Zyklus beträgt nun

$$G(x) = 300 + 295 + 290 + ... + [300 - 5\cdot(x - 1)] - 40 \quad [\text{ DM }].$$

Wird nur einmal geworben (und dann nicht mehr), erreicht der Tagesgewinn nach 21 Tagen den Betrag 200 DM (denn $300 - 5\cdot(21 - 1) = 200$) .
Die Zykluslänge muß daher kleiner als 21 sein.
Die Aufgabe besteht nun darin, eine optimale Zykluslänge x zu finden.
Es sei daher M(x) der maximale Gewinn innerhalb der ersten 21 Tage (Der Tagesgewinn soll ja nicht unterhalb von 200 DM fallen).

Nun gilt: $\mathbf{M(x) = \{300 + 295 + 290 + ... + [300 - 5(x-1)] - 40\}}\cdot\frac{21}{x}$ (Für x = 21 ist M(x) mit G(x) identisch).
In der geschweiften Klammer steht eine - um 40 verminderte - endliche arithmetische Summe.
Mit der Reihensummen-Formel $s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$ können wir den Term M(x) vereinfachen:

$M(x) = \{\frac{x}{2}\cdot[300 + 300 - 5(x-1)] - 40\}\cdot\frac{21}{x} = -\frac{105}{2}x + 6352{\cdot}5 - \frac{840}{x}$.

M(x) soll nun maximal werden $\Rightarrow M'(x) = -\frac{105}{2} + \frac{840}{x^2} = 0$ und $M''(x) = -\frac{1680}{x^3} < 0$.

Dies ergibt : $x = \sqrt{\frac{1680}{105}} = 4$ und $M''(4) < 0 \Rightarrow T(4) = 31\,340$.
Der maximale Gewinn wird also erreicht, wenn jeden 4. Tag eine Anzeige geschaltet wird. **(5P)**