Fünfte Fürther Mathematik-Olympiade

Klassenstufen 9 / 10
Die Lösungen der 1. Runde

Aufgabe 1:
Annahme: Alle Unterschiede sind verschieden.
Als Unterschiede kommen nur die zehn Zahlen 0 bis 9 in Frage. Da es zehn Unterschiede gibt, muss jeder Unterschied genau ein mal vorkommen. Die Summe aller Unterschiede beträgt dann
0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45.

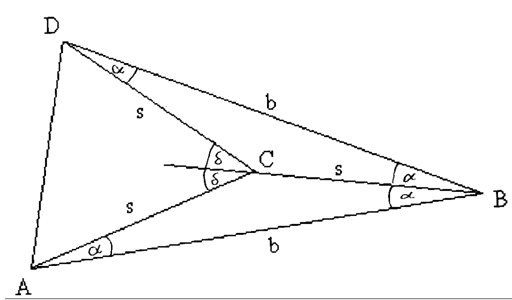
Wir betrachten neben den Unterschieden auch die vorzeichenbehafteten Differenzen. Im Beispiel:

47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
51	49	53	52	47	50	54	55	56	48
-4	-1	-4	-2	+4	+2	-1	-1	-1	+8
4	1	4	2	4	2	1	1	1	8

Die Summe der Differenzen ergibt null, da jede der zehn Zahlen genau ein mal als Subtrahend und ein mal als Minuend auftritt. Im Beispiel:
(-4)+(-1)+(-4)+...+(+8) = (47-51) + (48-49) + (49-53) + ... +(56 - 48) = 47+48+...56 - (47+48+...56) = 0
Die Summe der Unterschiede entsteht aus der Summe der Differenzen durch Betrag-Bildung aus den einzelnen Summanden. Ersetzt man in einer Summe ganzer Zahlen einen Summanden durch seinen Betrag, so ändert sich der Wert der Summe um einen gerade Zahl (oder gar nicht). Somit muss sich sie Summe der Differenzen (null) von der Summe der Unterschiede (45) um eine gerade Zahl unterscheiden. Widerspruch!

Aufgabe 2:
$n*(n+1)*(n+2)*(n+3)+1 = n^4+6n^3+11n^2+6n+1$
Ansatz: $(n^2+ an + 1)^2 = n^4 + 2an^3 + (a^2+2)n^2 + 2an + 1$
Koeffizienten-Vergleich liefert $2a = 6$ und $a^2 + 2 = 11$ mit Lösung $a = 3$
Also gilt $n*(n+1)*(n+2)*(n+3)+1 = (n^2+ 3n + 1)^2$
Wäre $n*(n+1)*(n+2)*(n+3)+1$ eine vierte Potenz, so wäre $n^2+ 3n + 1$ ein Quadrat.
Es gilt aber $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 3n + 1 < n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$
D.h. $n^2 + 3n + 1$ liegt echt zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen.
Anmerkung: Die Aussage wird falsch, falls n=0. Der Aufgabentext hätte also präziser lauten sollen: Addiert man zum Produkt von vier aufeinanderfolgenden *natürlichen* Zahlen....

Aufgabe 3: (Lösung nach S. Kraus, Gym. Höchstadt)



Sei Dreieck ABC wie in der Aufgabe beschrieben.
Spiegelung von A an BC ergibt D.
$\delta=30°$ (Außenwinkel in ΔABC).
$\angle DCA = 2*\delta = 2*30° = 60°$
ΔACD ist gleichschenklig mit Spitzen-Winkel 60° , somit gleichseitig. Also ist $\overline{AD}$ = s und ΔABD ist das gesuchte Dreieck mit Schenkellänge b und Basis s.
$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 15° + 60° = 75°$