

Fünfte Fürther Mathematik-Olympiade

Klassenstufe 11 Die Lösungen der 1. Runde

Aufgabe 1:

Wir nummerieren die Farben: braun: 1, grün: 2, gelb: 3, rot: 4.

n_i sei die Anzahl der Frösche mit Farbe i , also z.B. anfänglich $n_1 = 50$.

Wir vergleichen die Differenz zweier Anzahlen $n_i - n_k$ vor und nach einem Treffen ($i \neq k$).

Fall 1: Farbe i wird neu gebildet. n_i wird um 2 erhöht, n_k um 1 verringert. $n_i - n_k$ wächst um 3.

Fall 2: Farbe k wird neu gebildet. n_k wird um 2 erhöht, n_i um 1 verringert. $n_i - n_k$ verringert sich um 3.

Fall 3: Weder Farbe i noch k wird neu gebildet. n_i und n_k werden um 1 verringert. $n_i - n_k$ ändert sich nicht.

Bei jedem Treffen ändert sich also $n_i - n_k$ um null oder drei.

Gehören i und k zu ausgestorbenen Farben, so ist am Schluss $n_i - n_k = 0$. Die Anzahlen der drei ausgestorbenen Farben müssen sich ursprünglich um Vielfache von drei unterscheiden haben.

Bildet man die Differenzen der Zahlen 50, 57, 62 und 68, so sieht man leicht, dass nur die drei Zahlen 50, 62 und 68 durch drei teilbare Differenzen (nämlich 6, 12 und 18) haben.

Demnach bleiben die grünen Frösche übrig.

Wie viele davon haben überlebt?

Es sei b die Zahl der Treffen, bei denen zwei neue braune Frösche erschaffen worden sind. Entsprechend werden die Zahlen g (für grün), g' (für gelb) und r definiert.

Da alle roten Frösche ausgestorben sind, muss gelten: $68 - (b + g + g') + 2r = 0$ (1)

Da alle gelben Frösche ausgestorben sind, muss gelten: $62 - (b + g + r) + 2g' = 0$ (2)

Da alle braunen Frösche ausgestorben sind, muss gelten: $50 - (r + g + g') + 2b = 0$ (3)

Es folgt: $b + g + g' + r = 68 + 3r = 62 + 3g' = 50 + 3b$ (4)

Da je Treffen ein Frosch *abhanden kommt*, sind zum Schluß noch

$50 + 57 + 62 + 68 - (b + g + g' + r) = 237 - (68 + 3r) = 169 - 3r$ Frösche vorhanden.

Es können mithin höchstens 169 Frösche übrig bleiben.

Wie kann man einsehen, dass der Wert 169 auch wirklich angenommen wird?

Um die größte Zahl von Fröschen zu erschaffen, muß $r = 0$ sein. Aus (4) folgt:

$g' = 2$; $b = 6$; $g = 60$.

Auf folgende Weise lassen sich nun 169 grüne Frösche erzeugen:

$(50, 57, 62, 68) \rightarrow (48, 55, 66, 66)$ (2 Paare gelber Frösche neu erzeugt)

$(48, 55, 66, 66) \rightarrow (60, 49, 60, 60)$ (6 Paare brauner Frösche neu erzeugt)

$(60, 49, 60, 60) \rightarrow (0, 169, 0, 0)$ (60 Paare grüner Frösche neu erzeugt)